

"עד רובו" : הצעה לחישובו בעזרת כלים מתמטיים פשוטים*

במשנה נאמר : "היו בו [במקווה] ארבעים סאה, נתן סאה [של מי פירות, שהם נוזל פסול] ונטל סאה, הרי זה כשר"¹. הרב קהתי מבאר :

הטעם הוא לפי שהסאה שנתן לתוך המקווה בטלה ברוב מים, ונמצא שכל הארבעים ואחת סאה הוכשרו, הלכך כשחזר ונטל סאה, הרי נשארו ארבעים סאה כשרים... ובגמרא אמרו : "עד רובו" (בבלי יבמות פב ע"ב) כלומר שיכול ליתן סאה וליטול סאה רק "עד תשע עשרה פעמים" (רש"י), אבל יתר מכך, נפסל המקווה, שמא לא נשאר בו רוב מים אלא רוב מי פירות.

אם חוזרים על התהליך הזה - הכנסת סאה פסולה והוצאת סאה - עשרים פעם, קיים חשש, לפי הסברו של רש"י על הגמרה הנ"ל, שלא יישאר רוב של מים כשרים. כלומר, חוששים כי כל המים שהוצאו היו כשרים לחלוטין, כך שבסוף התהליך יישארו בדיוק עשרים סאה של מים כשרים לעומת עשרים סאה של מים פסולים.

גישה זאת פסימית למדי. הרי ברור כי המים היוצאים מהמקווה מורכבים ממים כשרים וממים פסולים כאחד, וככל שיהיו יותר מים פסולים במקווה יהיו יותר מים פסולים בסאה היוצאת². בכוונתי לערוך את חישוב כמות המים שיש להוציא כך שלא יישאר רוב של מים כשרים במקווה, בהנחה - המתקבלת על הדעת - שהיחס בין המים הכשרים לבין המים הפסולים בסאה היוצאת זהה לזה שבמקווה כולו באותו זמן. הנחה זו מסתמכת על העיקרון הכימי כי המים מתערבבים מהר מרגע שהם במגע הדדי. כמו כן, ננסה להעריך את ההסתברות שאחרי עשרים חזרות לא יהיה יותר רוב של מים כשרים.

נסמן $Q(t)$: כמות המים הפסולים בזמן t במקווה כולו. יוצא שבזמן t היחס במקווה בין המים הפסולים לבין סך הכל המים יהיה, אחרי הוספת סאה של מים פסולים : $r = \frac{Q(t)+1}{41}$. מזה נובע שאחרי

$$Q(t+1) = Q(t) + 1 - \frac{Q(t)+1}{41}$$

הוצאת הסאה בפעם ה- t כמות המים הפסולים יהיה כדלהלן :

$$\implies Q(t+1) = \frac{40}{41} \cdot Q(t) + \frac{40}{41}$$

$$a = \frac{40}{41} \text{ : נסמן}$$

$$\implies Q(t+1) = a \cdot Q(t) + a$$

$$Q(0) = 0 \text{ ברור כי}$$

לכן :

$$Q(1) = a$$

$$Q(2) = a^2 + a$$

* תודתי נתונה לאחייני היקר הרב יצחק ברנדייס, שהבחין כי יש מקום בסוגיה זו לטיפול מתמטי והעיר תשומת לבי לכך.¹ מקוואות ז ב.

² ראו חיים הרמן, אבן חוולס, אלכסנדר קליין : שימוש במשוואות דיפרנציאליות לקביעת הלכה במשנה, הגיון תשנ"ז, כרך ד'. אלא שכאן החישוב יותר פשוט, מפני שמדובר בתהליך בדיד ולא רציף.

$$Q(3) = a^3 + a^2 + a$$

.....

$$Q(t) = a^t + a^{t-1} + \dots + a$$

אם כן, ברור (בשעת הצורך, אפשר להוכיח זאת באמצעות אינדוקציה מתמטית) כי $Q(t)$ שווה לסכום של סידרה הנדסית:

$$Q(t) = \sum_{k=1}^t a^k = a \cdot \frac{1-a^t}{1-a}$$

אם כן, אפשר לחשב החל מאיזה t יתקבל $Q(t) > 20$:

$$a \cdot \frac{1-a^t}{1-a} > 20 \implies 1-a^t > 20 \cdot \frac{(1-a)}{a}$$

$$a^t < 1 - 20 \cdot \frac{(1-a)}{a}$$

$$a^t < 1 - \frac{20}{40}$$

$$a^t < 0.5$$

$$\implies t \cdot \ln(a) < \ln(0.5)$$

$$\implies t > \frac{\ln(0.5)}{\ln(40/41)} = 28.07$$

המסקנה היא: אם מניחים שבכל שלב הערבוב הוא הומוגני, רק כעבור 29 חזרות לא יהיה רוב של מים כשרים. בכל זאת רש"י קובע שיש לחשוש כי כל המים היוצאים הם המים הכשרים. ונשאלת השאלה: מהי ההסתברות לכך שזה אמנם יתרחש? נסמן: n הוא מספר מולקולות מים בסאה אחת. יוצא שההסתברות שבכל איטרציה רק מולקולות מים כשרות יצאו מהמקווה היא:

$$P = \frac{\binom{40n}{n} \binom{39n}{n} \binom{38n}{n} \dots \binom{21n}{n}}{\binom{41n}{n} \binom{41n}{n} \binom{41n}{n} \dots \binom{41n}{n}}$$

n מספר די גדול, ואין אפשרות, גם בעזרת המחשב, לחשב את ערך של הביטוי הנ"ל, אלא עבור ערכים נמוכים של n כדלהלן:

n	p
1	.001861415
2	.000003141
3	.000000005
4	8.9389E-12
5	1.5078E-14
6	2.5432E-17
7	4.2897E-20

יחד עם זה, ברור כי p יורד כאשר n עולה, כך שההסתברות הנ"ל היא זניחה לחלוטין.

ולסיכום: האמוראים - ורש"י בעקבותיהם - לא ידעו לערוך את החישובים הנ"ל ואין בעובדה זו כל סיבה לזלזל בהם. למעשה, אין הגמרא עורכת שום חישוב, אלא רק מציינת שיש לערוך אותו "עד רובי", ויהיו הכלים שישתמשו בהם אשר יהיו. גם רש"י מן הסתם הרגיש שיש סיבוך מסוים בנידון, ונקט בשיטה מחמירה מחוסר כלים מתאימים לפתרון בעיה זו. מוטל על הדורות המאוחרים יותר לנסות למצוא הסבר יותר הולם, כאשר יש בידיהם כלים שהראשונים לא זכו בהם. והנה מתברר שבנו של ר' עקיבא איגר שם לב לדבר הזה, כדלהלן:

הגאון ר' שלמה איגר (בשו"ת הגרעק"א ח"א סי' רכא ס"ט ט) שאל מאת אביו הגרעק"א קושיא חריפה בלשון השו"ע (וי"ד סי' ר"א סעיף כ"ד) מי כבשים וכו' אפילו עשה כן עד י"ט פעמים וכו'. וקשה למה התיר רק עד י"ט פעמים, הא בכל פעם שנוטל סאה, בודאי יש בו מעורב גם מהמי פירות שנתן עפ"י חשבון, וא"כ יכול לעשות כן שלשים פעם ויותר, ועדיין ישאר רוב מים. והשיב לו הגרעק"א (שם סי' רכ"ב) דכמו דלריש לקיש במקום רוב סמכין על שאני אומר, א"כ ה"נ במקוה גם בנטל סאה עד י"ט אין אנו מקילין רק בצירוף שאני אומר דנטל כל המי פירות מקילין, והיינו דנוכל לתלות שיש עכשיו במקוה מ' סאה מים שנטל כל המי פירות, וא"כ זהו רק בנטל י"ט סאין דאיכא עכ"פ בודאי רוב היתר, אבל בנטל כ' סאה דבדרך הפשוט שנוטל לפי הערך ולא הוה רוב היתר כיון דליכא מ' סאה מים פסול המקוה, אלא דבאת לדון שאני אומר דאולי אתרמי דנקט רק המי פירות, ממילא יש לספק דנטל רק המים, ואין כאן אפילו רוב מים, וכל היכא דליכא רוב ודאי לא תלין בשאני אומר ע"ש מה שהאריך בזה. טיעונו של ר' עקיבא איגר הוא איפא שיש צורך ברוב וודאי של מים כשרים, ואם כן זקוקים להסברו של רש"י.