

דוקא בגט הנמצא הוא דחייש שמא מאחר נפל¹

הצגת הסוגיה

כתוב במשנה: "היו לו שתי נשים ושמותיהן שוות, כתב לגרש את הגדולה, לא יגרש בו את הקטנה"². והגמרא אומרת:

כתב לגרש את הגדולה, לא יגרש בו את הקטנה. קטנה הוא דלא מצי מגרש ביה, הא גדולה מצי מגרש ביה.

הרי למדנו במשנה שאיש שיש לו שתי נשים הנושאים שם זהה, אם הוא כתב גט לגדולה, הוא לא יוכל להשתמש בגט זה כדי לגרש את אשתו הקטנה. אם כן, ניתן לדייק שדווקא את הקטנה הוא לא יכול לגרש, אבל הגדולה שלשמה נכתב הגט, אין כל מניעה לגרשה, למרות שאין ראייה מתוך הגט שכוונתו אליה.

והגמרא מקשה: דין זה המשנה סותר לכאורה דן המופיע במקום אחר: "שני יוסף בן שמעון שהיו בעיר אחת, אין יכולים להוציא שטר חוב זה על זה, ולא אחר יכול להוציא עליהן שטר חוב", כיון שכל אחד מהם יכול לומר "לא אני לויתי ממך אלא חברי, ומסר לך שטר זה"³. זאת אומרת שלא ניתן להשתמש בשטר חוב אם קיים ספק בזהותו של בעל החוב. אם כן אף כאן יש לחשוש, לא ברור מתוך הגט לאיזו אישה הבעל התכוון, כך שיש לפסול את הגט מכל וכול. והגמרא עונה: "אלא מאי אית לך למימר? בעדי מסירה, ורבי אלעזר היא". כלומר: אין ספק בזהותה של האישה שגורשה, כיון שיש לנו עדים על מסירת הגט, שראו מי היא שקבלה את הגט בידה, וכדעת רבי אלעזר, ש"עדי מסירה כרתי"⁴.

לפי זה, מה תהיה עמדתו של רבי מאיר, החולק על רבי אלעזר, ושמסתפק בעידי חתימה? לכאורה לדעתו אף אדם לא יוכל לגרש את אשתו, בגלל החשש שקיים זוג נוסף הנושא אותו שם. זה מה שתוספות שואלים:

ואם תאמר: למאן דחייש... לשני שוירי ולשני יוסף בן שמעון אף על גב דלא הוחזקו, אם כן לרבי מאיר יפסלו כל הגיטין, דלא משכחת תו שום גט שיהא מוכח מתוכו. ואומר ר"י דדוקא בגט הנמצא הוא דחייש, שמא מאחר נפל, אבל חשיב שפיר מוכח מתוכו כיון דלא הוחזקו אלא שוירי אחד ויוסף בן שמעון אחד.⁵

לפי ר"י, יש לחלק בין שני מקרים: כאשר יעקב בא לפני בית הדין ומצהיר שבכוונתו לגרש את אשתו לאה, כותבים לו גט ולא חוששים שקיים עוד זוג יעקב-לאה באותו יישוב, דבר שהיה פוסל את הגט. מצד שני, אם מוצאים ברחוב גט המתייחס לזוג יעקב-לאה, ומכירים זוג כזה שמתכוון להתגרש, במקרה הזה יש לחשוש שאולי גט זה התייחס לזוג אחר בעל אותם שמות והמתגורר באותו יישוב, ואם כן הזוג המוכר לא יוכל להשתמש בגט זה. ונשאלת השאלה: מדוע יש יותר לחשוש במקרה השני מאשר במקרה הראשון?

למעשה, מדובר בשאלה בהסתברות. נוכיח בהמשך, באמצעות נוסחת בייס, כי ההסתברות שהגט יצא ממקום שבו קיים זוג נוסף במקרה השני היא בקירוב כפולה מההסתברות שקיים זוג נוסף במקרה הראשון.

הניתוח המתמטי של הסוגיה

נסמן:

n : מספר זוגות ביישוב.

m : מספר צירופי שמות אפשריים. יש להניח כי $m < n$.

אם עומד זוג אחד לפנינו, ההסתברות שיהיה זוג נוסף (אחד לפחות) הנושא אותם שמות שווה ל-

$$1 - \left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-1}. \text{ נכנה אותה } p_1, \text{ ההסתברות התואמת את המקרה הראשון.}$$

¹ תודתי נתונה לאחייני היקר האברך הרב מרדכי יעקובס, שהבין שיש כאן מקום לניתוח הסתברותי, ואף הגיע למסקנה הנכונה ולערכים מדויקים באמצעות סימולציה במקרה ספציפי אחד. תרומתי הצנועה הייתה רק השימוש בנוסחת בייס, שכמובן הוא לא הכיר.

² גיטין ג א.

³ בבלי בבא בתרא קעב ע"ב.

⁴ בבלי גיטין כד ע"ב.

⁵ תוספות גיטין כד ע"ב ד"ה בעדי מסירה ור' אלעזר היא.

- לגבי המקרה השני, יש לקחת בחשבון שתי אופציות אפשריות, כדלהלן:
- (1) לא קיים זוג נוסף הנושא את השמות יעקב-לאה.
 - (2) קיים זוג נוסף הנושא את השמות יעקב-לאה.

ההסתברות להימצא באופציה הראשונה שווה ל- $\left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-1}$. נסמן אותה a .
ההסתברות להימצא באופציה השנייה שווה - על פי התפלגות בינומית - ל-
 $\binom{n-1}{1} \cdot \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-2}$. נסמן אותה b .

עכשיו נדמיין שנמצא גט ברחוב, ורוצים לחשב את ההסתברות לכך שגט זה יישא את השמות של זוג מוכר: יעקב ולאה. אם במציאות מתקיימת האופציה הראשונה, ההסתברות שהגט יישא את השמות יעקב-לאה שווה $\frac{1}{n}$.

אם מתקיימת האופציה השנייה, ההסתברות שהגט יישא את השמות יעקב-לאה שווה ל- $\frac{2}{n}$. יוצא שאם מוצאים גט ברחוב, ההסתברות שהוא יישא את השמות יעקב-לאה, על פי נוסחת

$$\frac{2}{n} \cdot \binom{n-1}{1} \cdot \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-2} + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-1}$$

ההסתברות השלמה, תהיה שווה ל-

אם כן, במקרה שמצאו ברחוב גט עבור הזוג יעקב-לאה, ההסתברות שבאותו ישוב יהיו שני זוגות הנושאים אותם שמות, לפי נוסחת בייס, שווה ל- $\frac{\frac{2}{n} \cdot \binom{n-1}{1} \cdot \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-2}}{\frac{2}{n} \cdot \binom{n-1}{1} \cdot \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-2} + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-1}}$. ניתן לפשט את הביטוי הזה, והוא שווה ל- $\frac{2n-2}{2n+m-3}$. זה p_2 .

אם מניחים כי ההסתברות שיהיו שני זוגות נוספים או יותר הנושאים את השמות יעקב-לאה זניחה, נוכל לכתוב $a = \left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-1}$, וגם $b = 1 - a$. אם כן:

$$p_1 = 1 - a, p_2 = \frac{\frac{2}{n} \cdot (1 - a)}{\frac{2}{n} \cdot (1 - a) + \frac{1}{n} \cdot a} = \frac{2 - 2a}{2 - a}$$

נוודא:

$$\begin{aligned} p_1 &< p_2 \\ (1 - a)(2 - a) &< 2 - 2a \\ 2 - a - 2a + a^2 &< 2 - 2a \\ a^2 &< a \end{aligned}$$

וזה מתקיים, היות ו- $a < 1$.

אפשר אף למצוא את הערך המקורב של $\frac{p_1}{p_2}$, כדלהלן:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1 - a}{2 - 2a} \cdot (2 - a) = 1 - \frac{a}{2}$$

היות ו- a קרוב ל-1, מקבלים $\frac{p_1}{p_2} \cong 0.5$, ולמעשה מספר קצת יותר גבוה מחצי. החישוב הזה למעשה מצדיק את האינטואיציה של בעלי התוספות.

להלן סימולציה עבור ערכים שונים של n, m .

Obs	n	m	p1	a	b	sum	p2	prop
1	10	1000	0.008964	0.99104	0.008928	0.99996	0.01770	0.50647
2	10	11000	0.000818	0.99918	0.000818	1.00000	0.00163	0.50059
3	10	21000	0.000428	0.99957	0.000428	1.00000	0.00086	0.50031
4	10	31000	0.000290	0.99971	0.000290	1.00000	0.00058	0.50021
5	10	41000	0.000219	0.99978	0.000219	1.00000	0.00044	0.50016
6	10	51000	0.000176	0.99982	0.000176	1.00000	0.00035	0.50013
7	10	61000	0.000148	0.99985	0.000148	1.00000	0.00029	0.50011
8	10	71000	0.000127	0.99987	0.000127	1.00000	0.00025	0.50009
9	10	81000	0.000111	0.99989	0.000111	1.00000	0.00022	0.50008
10	10	91000	0.000099	0.99990	0.000099	1.00000	0.00020	0.50007
11	20	1000	0.018830	0.98117	0.018661	0.99983	0.03664	0.51386
12	20	11000	0.001726	0.99827	0.001724	1.00000	0.00344	0.50127
13	20	21000	0.000904	0.99910	0.000904	1.00000	0.00181	0.50067
14	20	31000	0.000613	0.99939	0.000613	1.00000	0.00122	0.50045
15	20	41000	0.000463	0.99954	0.000463	1.00000	0.00093	0.50034
16	20	51000	0.000372	0.99963	0.000372	1.00000	0.00074	0.50027
17	20	61000	0.000311	0.99969	0.000311	1.00000	0.00062	0.50023
18	20	71000	0.000268	0.99973	0.000268	1.00000	0.00053	0.50020
19	20	81000	0.000235	0.99977	0.000235	1.00000	0.00047	0.50017
20	20	91000	0.000209	0.99979	0.000209	1.00000	0.00042	0.50015
21	30	1000	0.028598	0.97140	0.028199	0.99960	0.05487	0.52117
22	30	11000	0.002633	0.99737	0.002630	1.00000	0.00525	0.50195
23	30	21000	0.001380	0.99862	0.001379	1.00000	0.00275	0.50102
24	30	31000	0.000935	0.99906	0.000935	1.00000	0.00187	0.50069
25	30	41000	0.000707	0.99929	0.000707	1.00000	0.00141	0.50052
26	30	51000	0.000568	0.99943	0.000568	1.00000	0.00114	0.50042
27	30	61000	0.000475	0.99952	0.000475	1.00000	0.00095	0.50035
28	30	71000	0.000408	0.99959	0.000408	1.00000	0.00082	0.50030
29	30	81000	0.000358	0.99964	0.000358	1.00000	0.00072	0.50027
30	30	91000	0.000319	0.99968	0.000319	1.00000	0.00064	0.50024
31	40	1000	0.038268	0.96173	0.037545	0.99928	0.07242	0.52839
32	40	11000	0.003539	0.99646	0.003533	0.99999	0.00704	0.50263
33	40	21000	0.001855	0.99814	0.001854	1.00000	0.00370	0.50138
34	40	31000	0.001257	0.99874	0.001257	1.00000	0.00251	0.50093
35	40	41000	0.000951	0.99905	0.000950	1.00000	0.00190	0.50071
36	40	51000	0.000764	0.99924	0.000764	1.00000	0.00153	0.50057
37	40	61000	0.000639	0.99936	0.000639	1.00000	0.00128	0.50048
38	40	71000	0.000549	0.99945	0.000549	1.00000	0.00110	0.50041
39	40	81000	0.000481	0.99952	0.000481	1.00000	0.00096	0.50036
40	40	91000	0.000428	0.99957	0.000428	1.00000	0.00086	0.50032
41	50	1000	0.047842	0.95216	0.046702	0.99886	0.08933	0.53554
42	50	11000	0.004445	0.99556	0.004435	0.99999	0.00883	0.50331
43	50	21000	0.002331	0.99767	0.002328	1.00000	0.00465	0.50174

Obs	n	m	p1	a	b	sum	p2	prop
44	50	31000	0.001579	0.99842	0.001578	1.00000	0.00315	0.50118
45	50	41000	0.001194	0.99881	0.001194	1.00000	0.00238	0.50089
46	50	51000	0.000960	0.99904	0.000960	1.00000	0.00192	0.50072
47	50	61000	0.000803	0.99920	0.000803	1.00000	0.00160	0.50060
48	50	71000	0.000690	0.99931	0.000690	1.00000	0.00138	0.50051
49	50	81000	0.000605	0.99940	0.000605	1.00000	0.00121	0.50045
50	50	91000	0.000538	0.99946	0.000538	1.00000	0.00108	0.50040
51	60	1000	0.057321	0.94268	0.055674	0.99835	0.10564	0.54261
52	60	11000	0.005350	0.99465	0.005335	0.99999	0.01061	0.50399
53	60	21000	0.002806	0.99719	0.002802	1.00000	0.00559	0.50209
54	60	31000	0.001901	0.99810	0.001900	1.00000	0.00379	0.50142
55	60	41000	0.001438	0.99856	0.001437	1.00000	0.00287	0.50107
56	60	51000	0.001156	0.99884	0.001156	1.00000	0.00231	0.50086
57	60	61000	0.000967	0.99903	0.000966	1.00000	0.00193	0.50072
58	60	71000	0.000831	0.99917	0.000830	1.00000	0.00166	0.50062
59	60	81000	0.000728	0.99927	0.000728	1.00000	0.00145	0.50054
60	60	91000	0.000648	0.99935	0.000648	1.00000	0.00130	0.50048
61	70	1000	0.066706	0.93329	0.064462	0.99776	0.12137	0.54960
62	70	11000	0.006253	0.99375	0.006234	0.99998	0.01239	0.50467
63	70	21000	0.003280	0.99672	0.003275	0.99999	0.00653	0.50245
64	70	31000	0.002223	0.99778	0.002221	1.00000	0.00443	0.50166
65	70	41000	0.001682	0.99832	0.001680	1.00000	0.00335	0.50125
66	70	51000	0.001352	0.99865	0.001351	1.00000	0.00270	0.50101
67	70	61000	0.001131	0.99887	0.001130	1.00000	0.00226	0.50084
68	70	71000	0.000971	0.99903	0.000971	1.00000	0.00194	0.50072
69	70	81000	0.000851	0.99915	0.000851	1.00000	0.00170	0.50064
70	70	91000	0.000758	0.99924	0.000758	1.00000	0.00151	0.50057
71	80	1000	0.075997	0.92400	0.073069	0.99707	0.13656	0.55651
72	80	11000	0.007156	0.99284	0.007131	0.99997	0.01416	0.50534
73	80	21000	0.003755	0.99625	0.003748	0.99999	0.00747	0.50280
74	80	31000	0.002545	0.99745	0.002542	1.00000	0.00507	0.50190
75	80	41000	0.001925	0.99808	0.001923	1.00000	0.00384	0.50144
76	80	51000	0.001548	0.99845	0.001547	1.00000	0.00309	0.50116
77	80	61000	0.001294	0.99871	0.001293	1.00000	0.00258	0.50097
78	80	71000	0.001112	0.99889	0.001111	1.00000	0.00222	0.50083
79	80	81000	0.000975	0.99903	0.000974	1.00000	0.00195	0.50073
80	80	91000	0.000868	0.99913	0.000867	1.00000	0.00173	0.50065
81	90	1000	0.085195	0.91480	0.081499	0.99630	0.15123	0.56334
82	90	11000	0.008059	0.99194	0.008026	0.99997	0.01593	0.50602
83	90	21000	0.004229	0.99577	0.004220	0.99999	0.00841	0.50316
84	90	31000	0.002867	0.99713	0.002863	1.00000	0.00571	0.50214
85	90	41000	0.002168	0.99783	0.002166	1.00000	0.00432	0.50162
86	90	51000	0.001744	0.99826	0.001742	1.00000	0.00348	0.50130

Obs	n	m	p1	a	b	sum	p2	prop
87	90	61000	0.001458	0.99854	0.001457	1.00000	0.00291	0.50109
88	90	71000	0.001253	0.99875	0.001252	1.00000	0.00250	0.50094
89	90	81000	0.001098	0.99890	0.001098	1.00000	0.00219	0.50082
90	90	91000	0.000978	0.99902	0.000977	1.00000	0.00195	0.50073
91	100	1000	0.094302	0.90570	0.089754	0.99545	0.16541	0.57010
92	100	11000	0.008960	0.99104	0.008920	0.99996	0.01768	0.50669
93	100	21000	0.004703	0.99530	0.004692	0.99999	0.00934	0.50351
94	100	31000	0.003189	0.99681	0.003183	0.99999	0.00635	0.50238
95	100	41000	0.002412	0.99759	0.002409	1.00000	0.00481	0.50180
96	100	51000	0.001939	0.99806	0.001937	1.00000	0.00387	0.50145
97	100	61000	0.001622	0.99838	0.001620	1.00000	0.00324	0.50121
98	100	71000	0.001393	0.99861	0.001392	1.00000	0.00278	0.50104
99	100	81000	0.001221	0.99878	0.001221	1.00000	0.00244	0.50091
100	100	91000	0.001087	0.99891	0.001087	1.00000	0.00217	0.50081